OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a XII-a

1) Să se calculeze $\int \frac{3\sin x+\cos x}{2\sin x+5\cos x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(***)

2) Se consideră funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}\left(1-\{x\}\right)$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

a) Să se arate că f admite primitive;

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

(***)

3) Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=xy+3x+3y+6$.

a) Să se arate că $*$ determină pe $(-3,+\infty)$ o structură de grup abelian;

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$ astfel încât $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } k \text{ ori}}=x$.

(***)

4) Fie $p\geq 3$ un număr prim și a un element de ordin 2 din grupul $\left(\mathbb{Z}_{2p},+\right)$. Să se arate că:

a) există o mulțime $H\subset\mathbb{Z}_{2p}$ cu p elemente, astfel încât suma elementelor mulțimii H este $\hat{0}$, iar $x-y\neq a$, oricare ar fi $x,y\in H$.

b) există exact 2^{p-1} submulțimi $F\subset\mathbb{Z}_{2p}$ care verifică cerința de la a).

(prelucrare G.M. 10/2013)

Propunător: prof. Marius Mohonea – C.N. "UNIREA "- Focşani

SUCCES!

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-14.02.2014

Clasa a XII-a

Soluţii

1) Fie $I=\int \frac{\sin x}{2\sin x+5\cos x}dx$ și $J=\int \frac{\cos x}{2\sin x+5\cos x}dx$

$2I+5J=\int 1dx=x+C$

$-5I+2J=\int \frac{-5\sin x+2\cos x}{2\sin x+5\cos x}dx=\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)+C$

Obținem $J=\frac{1}{29}\left(5x+2\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)\right)+C$ și $I=\frac{1}{29}\left(2x-5\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)\right)+C$

Atunci $\int \frac{3\sin x+\cos x}{2\sin x+5\cos x}dx=3I+J=\frac{1}{29}\left(11x-13\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)\right)+C$

2) Se explicitează funcția și se obține $f(x)=\begin{cases}(x+1)(-x), x\in[-1,0)\\ x(1-x), x\in[0,1)\\ 0, x=1\end{cases}=\begin{cases}-x^2-x, x\in[-1,0)\\ x-x^2, x\in[0,1]\end{cases}$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>0}} f(x)=f(0)=0$ se obține că f este continuă pe $[-1,1]$ și atunci f admite primitive

Primitivele lui f sunt de forma $F(x)=\begin{cases}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c_1, x\in[-1,0)\\ -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c_2, x\in[0,1]\end{cases}$

Relația $c_1=c_2$ se obține din continuitatea funcției F

3) Axiomele grupului abelian se verifică cu ușurință folosind, eventual, scrierea $x*y=(x+3)(y+3)-3$

Egalitatea $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } k \text{ ori}}=x$ este echivalentă cu $(x+3)^k-3=x<=>(x+3)\left[(x+3)^{k-1}-1\right]=0$

Valorile lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care există $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$ sunt $-4,-3,-2$

4) Singurul element de ordin 2 din $\left(\mathbb{Z}_{2p},+\right)$ este p

a) Fie $H=\{\hat{0},2,4...,2p-2\}$

Cum $0+2+...+2p-2=\frac{p(2p-2)}{2}=p\cdot\left(p-1\right)$, rezultă că suma elementelor mulțimii H este $\hat{0}$

Dacă $x,y\in H$ atunci $x-y\neq p$ și atunci H verifică condițiile problemei.

b) Fie $A_0=\{\hat{0},p\}$, $A_1=\{\hat{1},p+1\}$, …, $A_{p-1}=\{p-1,2p-1\}$

Dacă $x,y\in A_k$ atunci $x-y=p$ iar dacă $x\in A_k, y\notin A_k$ atunci $x-y\neq p$

Așadar din fiecare din mulțimile $A_0,A_1,...,A_{p-1}$ se alege un element

Presupunem că din $A_1,...,A_{p-1}$ s-au ales respectiv $x_1,...,x_{p-1}$ și notăm $S_1=x_1+...+x_{p-1}$

Suma elementelor nealese este $S_2=p+x_1+...+p+x_{p-1}=S_1$ (sunt număr par de p)

$S_1+S_2=\hat{1}+...+2p-1-p=p-p=\hat{0}\Rightarrow 2S_1=\hat{0}\Rightarrow S_1\in\{\hat{0},p\}$

Dacă $S_1=\hat{0}$ atunci din A_0 se alege $\hat{0}$, iar dacă $S_1=p$ atunci din A_0 se alege p

Așadar, numărul de submulțimi este egal cu număr de moduri de alege câte un element din mulțimile $A_1,...,A_{p-1}$, adică 2^{p-1}

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a XII-a

Bareme

1) Fie $I=\int \frac{\sin x}{2\sin x+5\cos x}dx$ și $J=\int \frac{\cos x}{2\sin x+5\cos x}dx$ ……1p

$2I+5J=\int 1dx=x+C$ ……1p

$-5I+2J=\int \frac{-5\sin x+2\cos x}{2\sin x+5\cos x}dx=\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)+C$ ……2p

Obținem $J=\frac{1}{29}\left(5x+2\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)\right)+C$ și $I=\frac{1}{29}\left(2x-5\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)\right)+C$ …2p

Atunci $\int \frac{3\sin x+\cos x}{2\sin x+5\cos x}dx=3I+J=\frac{1}{29}\left(11x-13\ln\left(2\sin x+5\cos x\right)\right)+C$ ……1p

2) Se explicitează funcția și se obține $f(x)=\begin{cases}(x+1)(-x), x\in[-1,0)\\ x(1-x), x\in[0,1)\\ 0, x=1\end{cases}=\begin{cases}-x^2-x, x\in[-1,0)\\ x-x^2, x\in[0,1]\end{cases}$ ...1p

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>0}} f(x)=f(0)=0$ se obține că f este continuă pe $[-1,1]$ și atunci f admite primitive……2p

Primitivele lui f sunt de forma $F(x)=\begin{cases}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c_1, x\in[-1,0)\\ -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c_2, x\in[0,1]\end{cases}$ ……2p

Relația $c_1=c_2$ se obține din continuitatea funcției F ……2p

3) Axiomele grupului abelian se verifică cu ușurință folosind, eventual, scrierea $x*y=(x+3)(y+3)-3$ ……4p

Egalitatea $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } k \text{ ori}}=x$ este echivalentă cu $(x+3)^k-3=x<=>(x+3)\left[(x+3)^{k-1}-1\right]=0$ …1p

Valorile lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care există $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$ sunt $-4,-3,-2$ ……2p

4) Singurul element de ordin 2 din $(\mathbb{Z}_{2p},+)$ este p ……1p

a) Fie $H=\{\hat{0},2,4...,2p-2\}$ ……1p

Cum $0+2+...+2p-2=\frac{p(2p-2)}{2}=p\cdot(p-1)$, rezultă că suma elementelor mulțimii H este $\hat{0}$

Dacă $x,y\in H$ atunci $x-y\neq p$ și atunci H verifică condițiile problemei. ……1p

b) Fie $A_0=\{\hat{0},p\}$, $A_1=\{\hat{1},p+1\}$, …, $A_{p-1}=\{p-1,2p-1\}$ ……1p

Dacă $x,y\in A_k$ atunci $x-y=p$ iar dacă $x\in A_k, y\notin A_k$ atunci $x-y\neq p$

Așadar din fiecare din mulțimile $A_0,A_1,...,A_{p-1}$ se alege un element……1p

Presupunem că din $A_1,...,A_{p-1}$ s-au ales respectiv $x_1,...,x_{p-1}$ și notăm $S_1=x_1+...+x_{p-1}$

Suma elementelor nealese este $S_2=p+x_1+...+p+x_{p-1}=S_1$ (sunt număr par de p)

$S_1+S_2=\hat{1}+...+2p-1-p=p-p=\hat{0}\Rightarrow 2S_1=\hat{0}\Rightarrow S_1\in\{\hat{0},p\}$ ……1p

Dacă $S_1=\hat{0}$ atunci din A_0 se alege $\hat{0}$, iar dacă $S_1=p$ atunci din A_0 se alege p

Așadar, numărul de submulțimi este egal cu număr de moduri de alege câte un element din mulțimile $A_1,...,A_{p-1}$, adică 2^{p-1} ……1p